Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Sean $f : R \to R$ y $g : R \to R$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad y \qquad g(x) = ce^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto (−1, 2) y tienen en ese punto la misma recta tangente.
(a) [2 puntos] Calcula los valores de a, b y c.
(b) [0'5 puntos] Halla la ecuación de dicha recta tangente.

Solución

(a)

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad y \qquad g(x) = ce^{-(x+1)}$$

Como se cortan en el punto (−1, 2), tenemos f(-1) = g(-1) = 2
Como en el punto (−1, 2) tienen la misma recta tangente, tienen la misma pendiente, es decir f'(-1) = g'(-1)
De f(-1) = g(-1) = 2
f(-1) = 1-a+b = 2
$g(-1) = c.e^0 = 2$, de donde **c = 2**
De f'(-1) = g'(-1)
f'(x) = 2x + a, de donde f'(-1) = -2 + a
$g'(x) = (-1)2e^{-(x+1)}$, de donde $g'(-1) = (-1)2e^{0} = -2$, igualando tenemos -2 + a = -2, por tanto **a = 0.**
Entrando en 1-a+b = 2 con a = 0, nos resulta **b = 1**.
Las funciones son $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2e^{-(x+1)}$
(b)
La recta tangente a f(x) en x = -1 es y – f(-1) = f'(-1(x-(-1)).
$f(x) = x^2 + 1$, f(-1) = 2.
f'(x) = 2x, f'(-1) = -2.
Sustituyendo tenemos que la recta tangente es y – 2 = – 2(x + 1)

Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dadas las funciones $f : [0,+\infty) \to R$ y $g : [0, +\infty) \to R$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad y \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

El área pedida es $\left|\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right|$, siendo a y b las soluciones de f(x) = g(x)

De f(x) = g(x), obtenemos $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$, elevando a la sexta resulta $x^3 = x^2$, de donde $x^3 - x^2 = 0 = x^2(x - 1)$. Las soluciones son x = 0(doble) y x = 1.

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})dx\right| = \left|\int_0^1 (x^{1/2} - x^{1/3})dx\right| = \left|\left[\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}\right]_0^1\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right| = \left|-\frac{1}{12}\right| = \frac{1}{12}u^2$$

Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 5y - \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro λ.
(b) [1 punto] Resuélvelo λ = −1.

Solución

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 5y - \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 5 & -\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{vmatrix} = (1)(-\lambda - 5\lambda) - (\lambda)(-2\lambda - \lambda) + (-1)(9) = 3\lambda^2 - 6\lambda - 9$. (Lo he desarrollado por los adjuntos de la 1ª fila)

Resolvemos |A| = 0, es decir $3\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0$, de donde $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$

Si $\boldsymbol{\lambda \neq -1}$ ***y*** $\boldsymbol{\lambda \neq 3}$*, tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si $\boldsymbol{\lambda = -1}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque una columna es nula, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Si $\boldsymbol{\lambda = 3}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4(1 - 6) = -20 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible, y no tiene solución.

(b)

Nos piden resolverlo si $\lambda = -1$.

Hemos visto que c*omo rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.*

Como rango(A)= rango(A^*) = 2, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos últimas, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

$2x + y - z = 0$

$x + 5y + z = 0$. Tomamos $z = \lambda \in \Re$

A la 1ª ecuación le sumo la 2ª multiplicada por -2, y tenemos $-9y = 3\lambda$. De donde $y = (-1/3)\lambda$.

Sustituyendo en $x + 5y + z = 0$, nos resulta $x = (2/3)\lambda$.

La solución del sistema es $(x, y, z) = ((2/3)\lambda, (-1/3)\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \Re$

Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Los puntos A(−2, 3, 1), B(2, −1, 3) y C(0, 1, −2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.

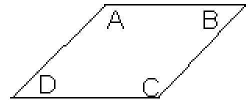
(a) [1 punto] Halla las coordenadas del vértice D.

(b) [1 punto] Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

(c) [0'5 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Solución

A(−2,3,1), B(2,−1,3) y C(0,1,−2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD



(a)
Si ABCD son los vértices de un paralelogramo. Los vectores libres **AB** y **DC** son iguales:
AB = (4, -4, 2)
DC = (-x, 1 – y, -2 –z)
Igualando coordenadas tenemos x = -4, y = 5 y z = -4. El punto que falta es D(-4, 5, -4)
(b)
La recta tiene por punto el B(2,-1,3) y como vector director el **AC** = (2,-2, -3). Su ecuación continua es

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-3}$$

(c)
Tomamos para el plano como punto el B(2,-1,3) y como vectores paralelos independientes el **BA** = (-4,4,-2) y **BC** = (-2,2,5). Su ecuación paramétrica es

$$\begin{cases} x = 2-4\lambda-2\mu \\ y = -1+4\lambda+2\mu \\ z = 3-2\lambda-5\mu \end{cases}, \text{ con } \lambda, \mu \in \Re$$

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

[2’5 puntos] Sea f : R → R la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que f tiene un máximo local en x = 1, que el punto (0, 1) es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4}$. Calcula a, b, c y d.

Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Esta función es continua y derivable, las veces que sean necesarias, en $\Re$.
Como tiene un máximo local en x = 1, nos dice que f ‘(1) = 0
Como (0, 1) es un punto de inflexión, nos dice que f(0) = 1 y que f ’’(0) = 0.
Además $\int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4}$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$.
De f (0) = 1, tenemos 1 = d, por tanto **d = 1**
De f ‘(1) = 0, tenemos 0 = 3a + 2b + c
De f ‘’(0) = 0, tenemos 0 = 2b, por tanto **b = 0**
Sustituyendo los valores encontrados tenemos c = - 3a, por tanto $f(x) = ax^3 – 3ax + 1$

De $\int_0^1 f(x)dx = \frac{9}{4}$ resulta $\frac{9}{4} = \int_0^1 (ax^3 - 3ax + 1)dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2} + x\right]_0^1$ = a/4 –(3a)/2 + 1

Resolviendo la ecuación 9/4 = a/4 –(3a)/2 + 1, obtenemos **a = -1** y por tanto **c =** -3(-1) **= 3**.

La función pedida es $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

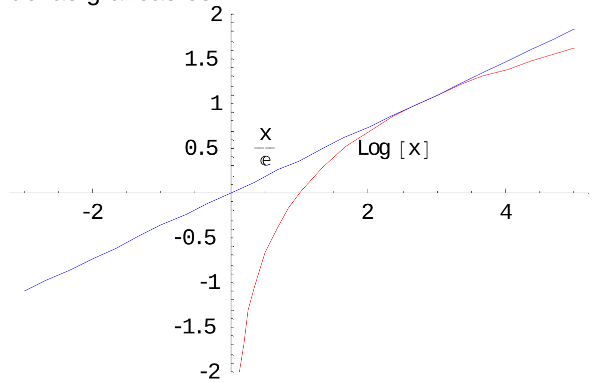
Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Sea g : (0, +∞) → R la función dada por g(x) = ln x (ln denota logaritmo neperiano).
(a) [0’75 puntos] Justifica que la recta de ecuación y = (1/e)x es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa x = e.
(b) [1’75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución

(a)

La recta tangente a g(x) en x = e es $y - g(e) = g'(e)(x - e)$.
$g(x) = \ln(x)$, $g(e) = \ln(e) = 1$.
$g'(x) = 1/x$, $g'(e) = 1/e$.
Sustituyendo tenemos que la recta tangente es $y - 1 = (1/e)(x - e)$, es decir $y = (1/e)x$.
(b)
Sabemos que $g(x) = \ln(x)$ pasa por (1,0) y tiene $x = 0^+$ como asíntota vertical.
Sabemos que $y = (1/e)x$ es una recta que pasa por (0,0) y coincide con $g(x) = \ln(x)$ en x = e., y que está por encima.
Aunque no lo piden un esbozo de las gráficas es



El área pedida es $\text{Área} = \int_0^e (\text{recta tangente})dx - \int_1^e (\text{función})dx = \int_0^e (\frac{x}{e})dx - \int_1^e \ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{e.2}\right]_0^e - [x.\ln(x) - x]_1^e =$

$= (e^2)/(2e) - [\,(e\ln(e) - e) - (1\ln(1) - 1)\,] = [\,(e/2) - 1\,]\ u^2$

Recordamos que $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$ es una integral por partes $(\int u dv = uv - \int v du)$

$$\int \ln(x)dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln(x) \rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{matrix} \right\} = x\ln(x) - \int x.\frac{dx}{x} = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x$$

Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz P que verifica $AP - B = C^T$ (C^T es la matriz traspuesta de C).

Solución

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-1) = 1 \neq 0$, A tiene matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T)$

$AP - B = C^T$, $AP = B + C^T$. Multiplicando esta expresión por la izquierda por A^{-1} tenemos $A^{-1}(AP) = A^{-1}(B + C^T)$. Operando queda $P = A^{-1}(B + C^T)$.
Hacemos los cálculos

$$(B + C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$P = A^{-1}(B + C^T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 1 de Sobrantes de 2008

Sea la recta r dada por

$$2x + y - mz = 2$$
$$x - y - z = -m$$

y el plano π definido por $x + my - z = 1$

(a) [1 punto] ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos ?

(b) [1 punto] ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano ?

(c) [0'5 puntos] ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando m = 0?

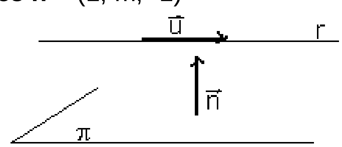
Solución

Recta $2x + y - mz = 2$
$x - y - z = -m$

Un vector director es el producto vectorial de los vectores normales de cada plano

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1 - m) - \mathbf{j}(-2 + m) + \mathbf{k}(-3) = (-1 - m, +2 - m, -3)$$

Plano $x + my - z = 1$. Un vector normal es $\mathbf{n} = (1, m, -1)$



(a)

Si la recta "r" es paralela al plano "π", el vector director de "r", **u**, es perpendicular al vector normal de "π", **n**, por tanto su producto escalar es cero

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = 0 = (-1 - m, +2 - m, -3) \bullet (1, m, -1) = -m^2 + m + 2 = 0$. Resolviendo la ecuación resulta m = - 1 y m = 2.

Es decir para m = - 1 y m = 2, la recta "r" es paralela al plano "π".

(b)

Para que la recta esté contenida en el plano, tiene que ser paralela y por el apartado (a) hemos visto que m = - 1 o m = 2. Resolvemos el sistema recta – plano para m = -1 y m = 2 y aquel en el cual tenga infinitas soluciones (dos ecuaciones y tres incógnitas) será el valor de m buscado.

Si **m = - 1**, el sistema es

$2x + y + z = 2$
$x - y - z = 1$
$x - y - z = 1$. Si nos damos cuenta la 2ª y la 3ª ecuación son iguales y el sistema es

$2x + y + z = 2$
$x - y - z = 1$, Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas. Luego para **m = -1** la recta r stá contenida en el plano π.

Si **m = 2**, el sistema es

$2x + y - 2z = 2$
$x - y - z = -2$
$x + 2y - z = 1$. Si sumamos la 2ª y la 3ª ecuación, y después se la restamos a la primera nos queda
$0x + 0y + 0z = 3$, lo cual es absurdo, por tanto para **m = 2** la recta es paralela al plano pero no está contenida en él.

(c)

Para **m = 0**, la recta corta al plano en un punto, que se obtiene resolviendo el sistema

$2x + y = 2$
$x - y - z = 0$
$x - z = 1$. 3ª ecuación – 2ª ecuación nos resulta **y = 1**, entrando en la 1ª ecuación x = 1/2, y después entrando en la 2ª ecuación nos queda **z = - 1/2**. **El punto de corte es (x, y, z) = (1/2, 1, - 1/2).**